Análisis de errores y representación de medidas experimentales

1. Introducción

Al realizar una medida experimental, el resultado del experimento debe contemplar los siguientes aspectos:

1. Además del valor numérico de la medida física, el resultado debe acompañarse de su **intervalo de error** o **intervalo de certidumbre**, el cual es otro valor numérico, expresado en las mismas unidades, que indica la precisión de la medida.
2. El resultado debe estar acompañado de su **unidad** correspondiente (excepto en las magnitudes adimensionales).

Así, el resultado de cualquier experimento debe expresarse siempre de la siguiente forma:

$$(x \pm \Delta x)\ \text{unidades}\,. \qquad (1)$$

En ocasiones es también útil expresar el error relativo:

$$\delta_x = \frac{\Delta x}{x} \times 100\,. \qquad (2)$$

Criterios de asignación de decimales:

- El error Δx debe expresarse mediante una única cifra significativa, excepto cuando ésta sea uno, en cuyo caso se expresa con dos cifras significativas;
- La magnitud x debe expresarse con el mismo número de cifras decimales que el error; es conveniente expresar los resultados en notación científica.
- Los valores deben redondearse al valor más cercano;

Ejemplos

Si $x = 1.98548$ y $\Delta x = 0.01241$, el resultado es $x = 1.986 \pm 0.012$; la precisión alcanza las milésimas;

Si $x = 34041.134$ y $\Delta x = 110.367$, el resultado es $x = (3.40 \pm 0.11) \times 10^4 = 34000 \pm 110$; la precisión alcanza las decenas.

2. Errores experimentales en medidas directas

Existen diferentes criterios para asignar estos errores a las medidas experimentales. Aquí presentamos un criterio simplificado y útil en la mayoría de situaciones.

Consideramos dos tipos de fuentes de error en las medidas experimentales:

- **Error de sensibilidad o de escala:** expresa la limitación en la precisión del aparato de medida.
- **Error aleatorio:** expresa la posible variabilidad de la medida.

Error de sensibilidad

Distinguimos entre la medida con aparatos analógicos (donde se puede apreciar un resultado intermedio entre divisiones de escala) y aparatos digitales. En el caso **analógico**, se asigna a Δ_S la **mitad de la mínima división** del aparato de medida. Cuando el aparato es **digital**, se asigna a Δ_S la **mínima división** del aparato.

Aparato analógico

$\Delta_S = 0.5mm$

Aparato digital

$\Delta_S = 0.1^oC$

Fig. 1. Ejemplos de instrumentos analógicos y digitales y su asignación del error de sensibilidad.

Error aleatorio

El error aleatorio Δ_R proviene del hecho de que, al repetir un experimento, los resultados pueden no ser iguales. Para su estimación seguimos el siguiente procedimiento:

1) Se realizan $N = 3$ medidas sucesivas x_1, x_2, x_3 de la misma magnitud.
2) Se calcula el valor medio:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n \ . \qquad (3)$$

3) Se calcula la dispersión de los valores:

$$D = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{\langle x \rangle} \times 100 \ . \qquad (4)$$

Si $D < 2\%$ no hace falta tomar más medidas; Si $2\% < D < 8\%$ se debe aumentar a $N = 6$ el número de medidas y repetir los cálculos; Si $8\% < D < 15\%$ se debe aumentar a $N = 15$ el número de medidas y repetir los cálculos.

4) Se asigna el error aleatorio como la **desviación típica** de los datos:

$$\Delta_R = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}\left(\langle x\rangle^2 - x_n^2\right)}. \tag{5}$$

<u>Asignación del error de una medida directa</u>

Finalmente, la asignación del error de una medida directa corresponde al mayor de estos dos valores de error, esto es:

$$\boxed{\Delta x = \max\left(\Delta_S, \Delta_R\right)}. \tag{6}$$

<u>Ejemplo</u>: Consideremos una medida de tiempo con un cronómetro digital que aprecia hasta la centésima de segundo. El error de sensibilidad es por tanto de $\Delta_S = 0.01\, s$. Se hacen tres medidas y el resultado es el siguiente:

$$t_1 = 25.04 \pm 0.01\, s$$
$$t_2 = 24.98 \pm 0.01\, s$$
$$t_3 = 25.12 \pm 0.01\, s$$

El valor medio es $\langle t\rangle = 25.0466\, s$ y su dispersión relativa es $D = 0.55\%$, por lo que no se requieren más medidas. El cálculo del error aleatorio da como resultado $\Delta_R = 0.0702\, s$ que, por tanto, supera al error de sensibilidad. Aplicando el criterio de cifras significativas, el resultado de la medida directa debe expresarse como

$$\boxed{t = 25.05 \pm 0.07\ s}.$$

El error relativo es $\delta_t = 2.794\%$.

3. Propagación de errores en medidas indirectas

Las **medidas indirectas** son aquellas que se obtienen como resultado de aplicar una fórmula teórica sobre valores que son el resultado de medidas directas.

<u>**Ejemplo: aproximación heurística:**</u> Supongamos que deseamos medir la velocidad a partir de dos medidas directas de longitud y tiempo con el siguiente resultado:

$$L = 10.51 \pm 0.05\, m$$
$$t = 25.05 \pm 0.07\ s$$

Por lo tanto, si calculamos la velocidad el resultado sería:

$$v=\frac{L}{t}=\frac{10.51\,m}{25.05\,s}=0.41956\,m/s$$

¿Cuál es el error en esta medida? Podemos hacer el siguiente razonamiento:

- Calculamos la situación que daría el menor valor posible de v. Esto ocurre cuando la longitud tenga el menor valor posible dentro de su intervalo de error, y el tiempo tenga el mayor valor posible. En esta situación el resultado sería:

$$v_{\min}=\frac{L_{\min}}{t_{\max}}=\frac{L-\Delta L}{t+\Delta t}=\frac{10.46\,m}{25.12\,s}=0.41640\,m/s$$

- Alternativamente podemos calcular la situación que daría el mayor valor posible de v. Esto corresponde al siguiente cálculo:

$$v_{\max}=\frac{L_{\max}}{t_{\min}}=\frac{L+\Delta L}{t-\Delta t}=\frac{10.56\,m}{24.98\,s}=0.42274\,m/s$$

Por tanto, la velocidad podría tomar valores alrededor del primer valor calculado con un margen de error $\Delta v=v_{\max}-v_{\min}=0.00634\,m/s$. Podemos asignar éste como el valor del error de modo que el resultado final sería:

$$v=(0.420\pm 0.006)\,m/s$$

Método riguroso

La idea heurística anterior puede hacerse más rigurosa aplicando el cálculo diferencial. Queremos calcular una medida indirecta dada por una función $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_N)$ a partir de N medidas directas, cada una con su error

$$(x_1\pm\Delta x_1);(x_2\pm\Delta x_2);\ldots;(x_N\pm\Delta x_N).$$

El criterio de propagación de **errores absolutos** indica que el error se obtiene como

$$\boxed{\Delta y=\left|\frac{\partial y}{\partial x_1}\right|\Delta x_1+\left|\frac{\partial y}{\partial x_2}\right|\Delta x_2+\ldots\left|\frac{\partial y}{\partial x_N}\right|\Delta x_N}. \quad (7)$$

<u>Ejemplo</u>: Si aplicamos este criterio al ejemplo anterior, el error de la velocidad es:

$$\Delta v=\frac{\Delta L}{t}+\frac{L\Delta t}{t^2}=\frac{0.05}{25.05}+\frac{10.51\times 0.07}{(25.05)^2}=0.00316\,m/s\ ,$$

de modo que el resultado final es:

$$v=(0.420\pm 0.003)\,m/s$$

Para algunos casos, la ecuación proporciona relaciones simples:

- **Suma / resta**: si $y = x_1 + x_2$ o $y = x_1 - x_2$ el error final se obtiene sumando los errores individuales $\Delta y = \Delta x_1 + \Delta x_2$
- **Producto / cociente**: si $y = x_1 x_2$ o $y = \frac{x_1}{x_2}$ el error relativo final es igual a la suma de errores relativos ya que $\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2}$.

4. Representación gráfica

La presentación de los resultados en forma de gráficas permite **visualizar** la evolución de un experimento en función de una variable. Además, se utiliza para determinar el valor de una magnitud, por lo general la pendiente de una recta, que representa la relación entre dos variables.

Una gráfica debe incluir los siguientes elementos:

- Ejes x-y con indicación de la magnitud representada en cada eje y sus unidades;
- Ejes numerados y con regla;
- Si hay más de una curva representada, debe incluirse una leyenda que indique las diferentes curvas;
- Los valores experimentales deben representarse mediante puntos (no deben unirse con líneas). Deben incluir barras de error;
- Expresiones teóricas y ecuaciones deben mostrarse con líneas (no deben incluir puntos).
- Si se realiza un ajuste, debe incluirse la expresión de la ecuación y coeficiente de correlación.

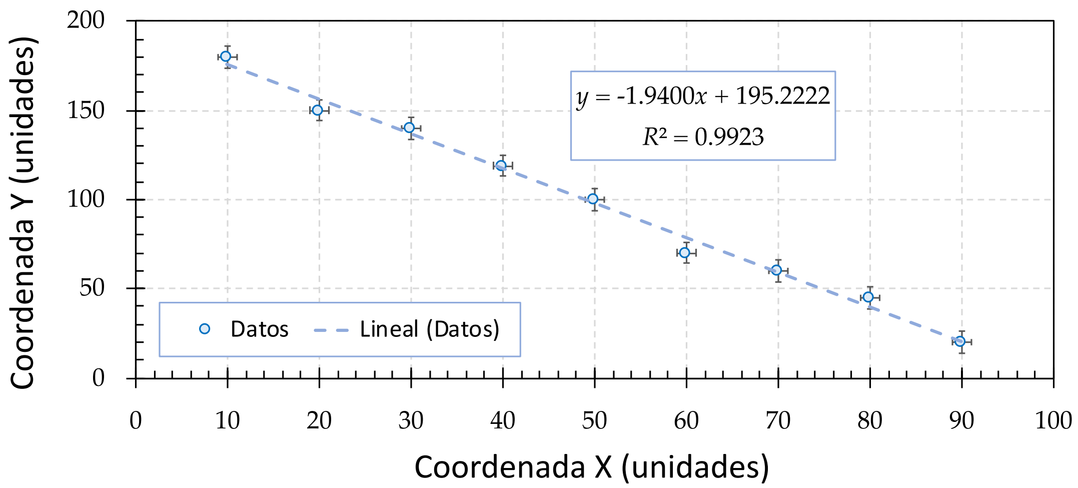

Fig. 2. Ejemplo de gráfica con todos sus elementos indicados.

5. Regresión líneal por ajuste por mínimos cuadrados

En muchas ocasiones la relación funcional entre las variables x-y es mediante una recta $y = Ax + B$, donde las constantes A y B son de interés físico. Conviene poder evaluar su valor y su error a partir de los datos experimentales. El problema se resuelve mediante el ajuste de mínimos cuadrados. Si (x_n, y_n), $n = 1,2,...N$ representan los N puntos experimentales, los valores de A y B se obtienen como:

$$A = \frac{\sum_{n=1}^{N}(x_n - \langle x\rangle)(y_n - \langle y\rangle)}{\sum_{n=1}^{N}(x_n - \langle x\rangle)^2}, \tag{9}$$

$$B = \langle y\rangle - A\langle x\rangle \tag{10}$$

donde $\langle x\rangle$ e $\langle y\rangle$ son los valores medios de las magnitudes x e y.

Correlación

El coeficiente de correlación mide numéricamente lo cercanos que están los datos experimentales a la recta. Se obtiene mediante la relación:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{n=1}^{N}(x_n - \langle x\rangle)(y_n - \langle y\rangle)}{\sqrt{\sum_{n=1}^{N}(x_n - \langle x\rangle)^2 \sum_{n=1}^{N}(y_n - \langle y\rangle)^2}}, \tag{11}$$

El valor de r_{xy}^2 toma valores entre cero y uno. Es cercano a cero para datos no correlacionados, aumenta cuando presentan una **dependencia estadística**, y se acerca a uno cuando presentan una **dependencia funcional**.

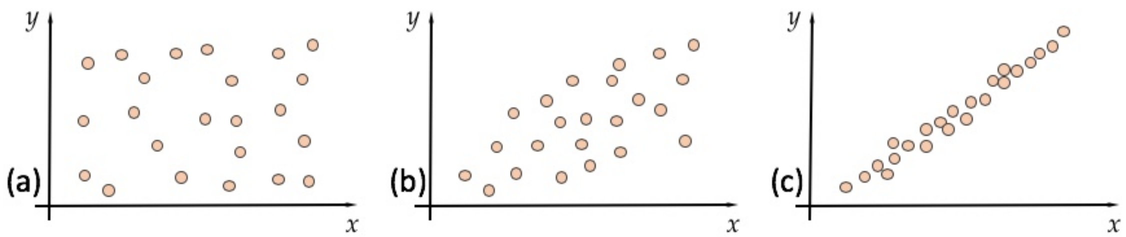

Fig. 4. Distribución de datos (a) sin correlación, (b) con dependencia estadística y (c) con dependencia funcional (altamente correlacionados).

El coeficiente de correlación también sirve para obtener el error de los parámetros de la de recta de regresión (pendiente y ordenada al origen) ocasionados por la desviación del comportamiento con respecto a la según:

$$\Delta A = \frac{A}{\sqrt{N-2}}\sqrt{\frac{1}{r_{xy}^2}-1}\,, \quad \text{y} \quad \Delta B = \frac{\Delta A}{\sqrt{N}}\sqrt{\sum_{n=1}^{N} x_n^2} \tag{12}$$

Observemos que estos errores se hacen cero si el coeficiente de correlación es 1, lo que indicaría que los datos de ajustan de forma perfecta a una recta.

Bibliografía adicional

1. C. Sánchez del Río, Análisis de Errores, Ed. Eudema (1989).